

Ч 24228 РУ

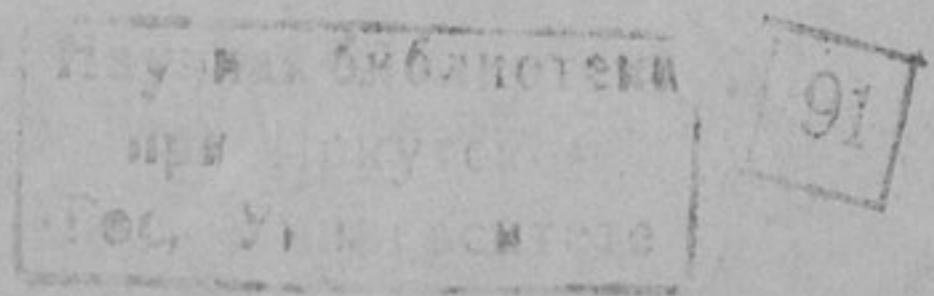
А. А. ТРЕСКОВ.

551.463 (87.3)

Уважаемому Викентию Карапину
Автограф автора

О зависимости между наибольшей
толщиной льда и температурой
зимы на Байкале.

120н/4820



О зависимости между наибольшей толщиной льда и температурой зимы на Байкале.

Теоретические рассуждения, приводящие к решению задачи определения зависимости между наибольшей толщиной льда и температурой зимы, состоят в следующем:

На границе воды и ледяного слоя толщины h возьмем элементарный объем воды, высотою dh' и с поперечным сечением в 1 ст.²

Количество теплоты, теряемое этим элементарным объемом при замерзании, равно $\xi dh'$, где ξ — скрытая теплота таяния льда. С другой стороны, то же количество теплоты должно быть равным $\frac{\lambda T}{h} d\tau$, где λ теплопроводность льда, T — температура его наружной поверхности и $d\tau$ — время замерзания нашего элементарного объема. На самом деле, последнее выражение определяет количество теплоты, прошедшей через поперечное сечение ледяного слоя, расположенного над замерзающим элементарным объемом воды, за время отвердевания последнего.

Таким образом мы приходим к равенству:

$$\xi dh' = \frac{\lambda T}{h} d\tau$$

Обозначая через ρ плотность льда, для высоты слоя воды, давшей при замерзании ледяной покров толщины h , мы получим выражение: $h' = h\rho$. Сообразно с этим, предыдущая формула даст:

$$\xi \rho dh = \frac{\lambda T}{h} d\tau$$

или:

$$T d\tau = \frac{\xi \rho}{\lambda} h dh$$

Для вычисления толщины льда H , образовавшегося за период τ с момента замерзания озера, мы должны интегрировать это уравнение в пределах $(0, \tau)$ для времени и $(0, H)$ — для h .

Выполняя указанное интегрирование, найдем:

$$\int_0^\tau T d\tau = \frac{\xi \rho}{\lambda} \int_0^H h dh$$

Но

$$\frac{\xi \rho}{\lambda} \int_0^H h dh = \frac{H^2 \xi \rho}{2 \lambda}, \text{ а } \int_0^\tau T d\tau = \bar{T} \tau,$$

где \bar{T} — среднее значение температуры за период τ , являющийся «возрастом льда».

Таким образом:

$$\frac{H^2 \xi \rho}{2\lambda} = \bar{T}\tau$$

откуда:

$$H = \sqrt{\frac{2\lambda T\tau}{\xi \rho}}$$

или:

$$H = \alpha \sqrt{\bar{T}\tau},$$

если обозначить:

$$\sqrt{\frac{2\lambda}{\xi \rho}} \text{ через } \alpha$$

Полагая среднюю температуру наружной поверхности льда равной средней температуре воздуха, заметим, что $\bar{T}\tau$ будет суммой средних суточных температур, соответствующей «возрасту льда», если только за единицу времени мы примем сутки.

Эту сумму В. Б. Шостакович назвал «суммой холода», и мы будем обозначать ее через Σ_k .

Соответственно с этим формула $H = \alpha \sqrt{\bar{T}\tau}$ примет следующий простой вид:

$$H = \alpha \sqrt{\Sigma_k}$$

т. е. толщина ледяного покрова пропорциональна корню квадратному из «суммы холода», соответствующей его «возрасту», при чем коэффициент пропорциональности α , как будет указано ниже, равен 2.704. Из предыдущей формулы следует, что толщина льда не зависит от распределения температур во времени, а определяется исключительно суммой холода соответствующей возрасту льда.

Желая вычислить по предыдущей формуле наибольшую толщину льда для данного года, естественно принять «возраст льда» равным времени, протекшему с момента замерзания озера до систематического появления средних суточных температур выше нуля.

Несмотря на то, что озеро замерзает при толщине льда в 10—20 ст., мы можем применять выше приведенную формулу без каких-либо изменений, т. к. промерзание до указанной глубины требует весьма небольших «сумм холода». Так, полагая $H=15$ ст., найдем для Σ_k величину, близкую к 30° , что в декабре и январе месяцах (время замерзания Байкала) имеет место на протяжении всего одного—двух дней.

Постоянный коэффициент α был определен мною эмпирически, по способу наименьших квадратов.

Для этого были взяты все случаи, где имелись на лицо одновременно и температурные данные и сведения о времени замерзания озера и о наибольшей толщине ледяного покрова (всего 78 случаев, для восьми различных пунктов).

Коэффициент α оказался равным 2.704. Зная α легко определить и коэффициент теплопроводности льда, пользуясь соотношением:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\lambda}{\xi \rho}},$$

откуда:

$$\lambda = \frac{\xi \rho \alpha^2}{2}$$

При этом нужно не забывать, что величина λ отнесена у нас к суткам, т. к. за единицу времени приняты сутки. Поэтому для получения значения λ отнесенного к секунде, нужно найденную вышеуказанным способом величину разделить на $60 \times 60 \times 24$. В результате вычислений я получил для теплопроводности льда значение 0,00311.

Причинами, влияющими на толщину ледяного покрова и вызывающими отклонения наблюдаемых толщин льда от вычисленных, являются снежный покров и не принятое, при выводе формулы, во внимание охлаждение воды под льдом.

Но наиболее сильный рост льда происходит в период, непосредственно следующий за замерзанием озера, а в это время нельзя ожидать на озере скопления снега. Охлаждение воды также не искаивает значительно предполагавшуюся нами, при выводе формулы, теплоотдачу через лед, что видно из сравнения найденной мною величины теплопроводности льда с величинами, данными в «Physikalisch-Chemische Tabellen von Landolt und Börnstein».

В последних имеются для теплопроводности льда следующие значения:

0.0057	Нейман 1862—1863 г. г.
0.0052	Странео 1897 г.
0.00223 паралл. оси	Форбс 1867, 1872/75 г. г.
0.00213 перпендиц. оси	

Найденная мной величина 0.00311 лежит между этими числами.

Но не учитывая влияние снежного покрова, охлаждение воды под льдом и неоднородность льда, мы должны получить при вычислении теплопроводности льда величину, меньшую действительной. Поэтому полученный результат может являться косвенным указанием того, что числа данные Нейманом и Странео, более верны, чем определения Форбса.

Из нижепомещаемой таблицы, в которой сопоставлены наблюденные и вычисленные, по указанной ранее формуле, значения наибольшей толщины льда, видно, что среднее расхождение между ними 10%, при чем из взятых 78 случаев, 50 имеют расхождение, не превышающее 10%.

Наибольшие отклонения наблюдаются в Хараузе, где преобладают значительные по величине положительные разности $H - H'$ —наблюденной и вычисленной глубины промерзания. Последнее можно, до некоторой степени, объяснить близостью Селенги, т. к. приносимые последней большие количества холодной речной воды могут вызвать быстрое охлаждение воды озера и этим обусловить здесь, при одной и той же «сумме холода» промерзание на большую глубину, чем в других местах. Напротив того, на средине озера у Большого Ушканьего острова, где влияния, искающие предполагаемый нами процесс замерзания, должны быть наиболее слабыми, средняя величина разности $(H - H')$ равна 5%. Результаты некоторых наших вычислений даны в таблице I.

Таблица—Tabelle I.

Наблюденные и вычисленные величины максимальной толщины льда.

Die beobachteten und die berechneten Werte der maximalen Eisdicke.

У Ушканьих островов.

Uschkanji Jnsel.

Год—Jahr.	1900	1902	1903	1908	1909	1910	1911	1912	1913
Наблюд. вел. H Beob	100	100	128	105	130	110	100	121	101
Вычисл. вел. H' Berg	98	97	107	109	121	110	105	116	95
Разность—Differenz	2	3	21	4	9	0	-5	5	6
Разность в % Diff. in %	2	3	17	4	7	0	5	4	6

Год—Jahr.	1914	1915	1916
Наблюд. вел. H Beob	117	106	115
Вычисл. вел. H' Berg	110	98	111
Разность Differenz	7	8	4
Разность в % Diff. in %	6	8	3

Средняя разность $\frac{(H - H')}{\text{Mittlere Differenz}} + 5 \text{ ст. } 5\%$

Голоустное.

Goloustnoje.

Год — Jahr.	1899	1900	1901	1902	1903	1909	1910	1911	1912
Наблюд. вел. H. Beob	92	81	82	95	107	89	98	69	94
Вычисл. вел. H' Ber	95	90	94	90	111	87	102	97	93
Разность — Differenz	-3	-9	-12	5	-4	2	-4	-28	1
Разность в % Diff. in %	3	11	19	5	4	2	4	41	1

Год — Jahr.	1913	1915
Наблюд. вел. H. Beob	74	106
Вычисл. вел. H' Ber	77	89
Разность — Differenz	-3	17
Разность в % Diff. in %	4	16

Средняя разность } $(H-H') - 4$ ст. 10%
Mittlere Differenz }

Лиственичное.

Listwenitschnoje.

Год — Jahr.	1900	1901	1902	1909	1910	1911	1912
Наблюд. вел. H. Beob	108	103	86	106	120	92	116
Вычисл. вел. H' Ber	82	96	93	98	109	96	100
Разность — Differenz	26	7	-7	8	11	-4	16
Разность в % Diff. in %	24	7	8	8	9	4	14

Средняя разность } $+8$ ст. 11%
Mittlere Differenz }

Душкачан.

Duschkatschan.

Год — Jahr.	1911	1912	1915	1916
Наблюд. вел. H. Beob	110	124	118	87
Вычисл. вел. H' Ber	119	137	125	116
Разность — Differenz	-9	-13	-7	-29
Разность в % Diff. in %	8	10	6	33

Средняя разность } $(H-H') - 14$ ст. 14%
Mittlere Differenz }

Песчаная Бухта.

Pestschanaja Bucht.

Год — Jahr.	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907
Наблюд. вел. H. Beob	100	78	89	99	73	86	90	109
Вычисл. вел. H' Ber	94	92	88	107	82	98	84	100
Разность — Differenz	6	-14	1	-8	-9	-12	6	9
Разность в % Diff. in %	6	18	1	8	12	14	7	8

Средняя разность } $(H-H') - 3$ ст. 9%
Mittlere Differenz }

Туркинский маяк.

Год — Jahr.	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907	1909	1910
Наблюд. вел. H. Beob	108	76	131	95	92	99	131	130	124
Вычисл. вел. H' Ber	102	95	124	99	98	104	117	115	115
Разность Differenz	6	-19	7	-4	-6	-5	14	15	9
Разность в % Diff. in %	6	25	5	4	7	5	11	12	7

Год — Jahr.	1911	1912	1913	1914
Наблюд. вел. H. Beob	102	136	104	125
Вычисл. вел. H' Ber	112	120	101	109
Разность — Differenz	10	16	3	16
Разность в % Diff. in %	10	12	3	13

Средняя разность } $(H-H') + 5$ ст. 9%
Mittlere Differenz }

Ольхон.

Год — Jahr.	1901	1903	1908	1909	1911	1912	1913	1914	1915
Наблюд. вел. H. Beob	105	97	104	109	101	124	76	107	92
Вычисл. вел. H' Ber	84	94	113	111	112	123	100	112	108
Разность — Differenz	21	3	9	-2	-11	1	-24	-5	-16
Разность в % Diff. in %	20	3	9	2	11	1	31	5	17

Средняя разность } $(H-H') - 5$ ст. 11%
Mittlere Differenz }

Хараяз

Год — Jahr.	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909
Наблюд. вел. H. Beob	117	107	128	115	107	112	123	108	126
Вычисл. вел. H' Ber	108	102	114	89	98	95	112	101	103
Разность — Differenz	9	5	14	26	9	17	11	7	23
Разность в % Diff. in %	8	5	11	23	8	15	8	6	18

Год — Jahr.	1910	1911	1912	1913	1915
Наблюд. вел. H. Beob	132	86	104	67	110
Вычисл. вел. H' Ber	108	101	118	80	94
Разность — Differenz	24	-25	-14	-13	16
Разность в % Diff. in %	18	28	13	19	15

Средняя разность } $(H-H') + 8$ ст. 14%
Mittlere Differenz }

Средняя из всех наблюдений величина разности | $(H-H') + 2$ ст. 10%
Mittl. Differenz aus allen Beobachtungen |

Über den Zusammenhang zwischen der maximalen Eisdicke und der Wintertemperatur am Baikalsee.

Um den genannten Zusammenhang zu bekommen, führen folgende Überlegungen zum Ziele.

Auf der Grenze zwischen dem Wasser und dem Eise, das von der Dicke h sei, nehmen wir ein Elementarvolumen Wasser, von der Höhe dh' und von dem Querdurchschnitt 1 cm^2 . Die Wärmemenge, welche von diesem Volumen bei dem Gefrieren verloren wird, ist gleich $\xi dh'$, wo ξ die Schmelzwärme des Eises bedeutet. Dieselbe Menge ist aber auch $\frac{\lambda T}{h} d\tau$ gleich, wo λ der Wärmeleitungscoefficient des Eises ist, T die Temperatur der äusseren Fläche und $d\tau$ die Dauer des Gefrieren bedeutet. Der letzte Ausdruck giebt uns ja die Wärmemenge, welche durch die Eishülle während das Gefrierens durchdringt.

So kommen wir zur Gleichung:

$$\xi dh' = \frac{\lambda T}{h} d\tau$$

Bezeichnen wir mit ρ die Eisdichte, so haben wir die Beziehung:

$$dh' = \rho dh,$$

wo dh die Dicke des gebildeten Eises ist. Dann haben wir:

$$T d\tau = \frac{\xi \rho}{\lambda} h dh$$

Um die Dicke H des Eises zu berechnen, welche sich in dem Zeitraum T von dem Momente des Zufrierens des Eises gebildet hat, müssen wir die letzte Gleichung integrieren, wobei für τ die Grenzen $(0, \tau)$ für $h (0, H)$ einzustellen sind. So bekommen wir

$$\frac{H^2 \xi \rho}{2 \lambda} = \int_0^\tau T d\tau = \bar{T} \tau,$$

wo \bar{T} die mittlere Temperatur während des genannten Zeitraums τ ist; der letzte kann als das „Alter“ des Eises bezeichnet werden.

So haben wir:

$$H = \sqrt{\frac{2 \lambda \bar{T} \tau}{\xi \rho}}, \text{ oder auch:}$$

$$H = a \sqrt{\bar{T} \tau}, \quad a = \sqrt{\frac{2 \lambda}{\xi \rho}}$$

Die mittlere Temperatur der äusseren Eisoberfläche setzen wir der mittleren Lufttemperatur gleich. Dann ist das Produkt $\bar{T} \tau$ gleich der Summe der mittleren täglichen Temperaturen, welche dem genannten Alter des Eises entspricht; dabei muss für die Zeiteinheit die Tagesdauer gewählt werden.

Diese Summe wurde von W. B. Schostackowitsch die Kältesumme genannt; wir werden sie im folgenden durch Σk bezeichnen, und es wird entsprechend:

$$H = a \sqrt{\Sigma k}$$

Es ist also die Dicke des Eises der Quadratwurzel aus der Kältesumme proportional, welche dem Alter des Eises entspricht; der Proportionalitätskoeffizient, wie weiter unten gezeigt wird, ist 2,704 gleich.

Es ist wohl bemerkenswert, dass die Eisdicke nicht von den zeitlichen Veränderungsweise der Temperatur abhängig ist, sondern ausschliesslich von der dem Alter des Eises entsprechenden Kältesumme.

Wollen wir nach der gegebenen Formel die maximale Eisdicke für das betreffende Jahr berechnen, so müssen wir natürlicher Weise für das Alter des Eises den Zeitraum bineinstellen, welcher von dem Gefrieren bis zum Einstellen systematischer positiver täglicher Mitteltemperaturen dauert.

Obgleich der See bei einer anfänglicher Eisdicke 10—20 cm. zufriert, können wir ohne weiteres unsere Formel anwenden, da die Bildung einer Eisschicht solcher Dicke eine sehr kleine Kältesumme erfordert: unsere Formel ergibt sie zu etwa 30°, was im Dezember und Januar (die Zeit des Zufrierens des Baikalsees) in ein Paar Tage stattfindet.

Die Konstante a wurde aus den Beobachtungsergebnissen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Dazu wurden alle Fälle in Betracht gezogen, wo gleichzeitig Temperaturbeobachtungen und Berichte über die Zeit der Zufrierens bzw. die maximale Eisdicke vorlagen (Im Ganzen 78 Fälle, für 8 verschiedene Punkte). So ergab sich für a der Zahlwert 2,704.

Ist a bekannt, so kann daraus λ (die Wärmeleitung des Eises) berechnet werden, da

$$\lambda = \frac{\xi \rho a^2}{2}$$

Dabei muss in Acht behalten werden, dass für die Zeiteinheit ein Tag gewählt ist. Um zu gewöhnlichen Einheiten überzugehen, müsste man den gefundenen Wert mit $60 \times 60 \times 24$ multiplizieren. So ergibt Sich für λ der Zahlwert 0,00311.

Zu den Ursachen, welche auf die Eisdicke Einfluss haben könnten, und welche Abweichungen von der obigen Formel herbeiführen, gehören die Schneedecke und die nicht in Betracht gezogen Abkühlung des Wassers unter der Eisdecke.

Die schnellste Eisbildung tritt aber unmittelbar nach dem Zufrieren auf, und in diesem Zeitraum sind grössere Schneefälle nicht zu erwarten. Auch die Wärmeabgabe bei der Temperaturerniedrigung unter dem Eise scheint keine grosse Abweichungen herbeizuführen, da die von mir berechnete Grösse für den Wärmeleitungskoeffizient mit den aus physikalischen Untersuchungen erzielten verglichen sehr ähnlich ausfällt. In den Physikalisch-Chemischen Tabellen von Landolt und Börnstein sind folgende Werte gegeben:

0,0057	Neumann 1862-63
0,0052	Straneo 1897
0,00223 parall. z. Axe	{ Forbes 1867, 1872-75
0,00213 senkr. z. Axe	

Die von mir berechnete Zahl (0,00311) liegt in den Grenzen der Tabellenzahlen.

Aber alle unsere vereinfachende Annahmen (Vernachlässigung der Schneeschicht, bzw. der Abkühlung des Wassers unter dem Eise) haben eine Verminderung des genannten Koeffizienten zur Folge. Darum kann das gegebene Resultat als eine Hinweisung darauf gelten, dass die von Neumann und Straneo gefundenen Werte richtiger sein dürften, als diejenige von Forbes.

Aus der Tabelle I, in welcher die gefundenen bzw. die nach der obigen Formel gewonnenen Zahlwerte der maximalen Eisdicke zusammengestellt sind, erleuchtet, dass deren mittlere Differenz 10% beträgt, wobei unter den 78 herangezogenen Fällen in 50 die Differenzen 10% nicht übersteigen.

Die Grösste Abweichungen werden in Char aus beobachtet, wo merkliche positive Differenzen $H - H'$ der beobachteten bzw. der berechneten Eisdicken vortreten. Dass lässt sich zwanglos durch die Nähe der Selenga-Mündung erklären, da die von dem Flusse herbeigeführten grossen Mengen kaltes Wassers rasche Erkühlung der Wassers des Sees zu Folge haben dürften bzw. eine dickere Eisschichtbildung.

Hingegen ist in der Mitte des Sees, bei den Uschkanji Inseln, wo alle Einflusse, die Abweichungen mitbringen könnten, am schwächsten vorkommen, auch der Mittelwert der Differenzen verhältnismässig sehr klein (etwa 5%).